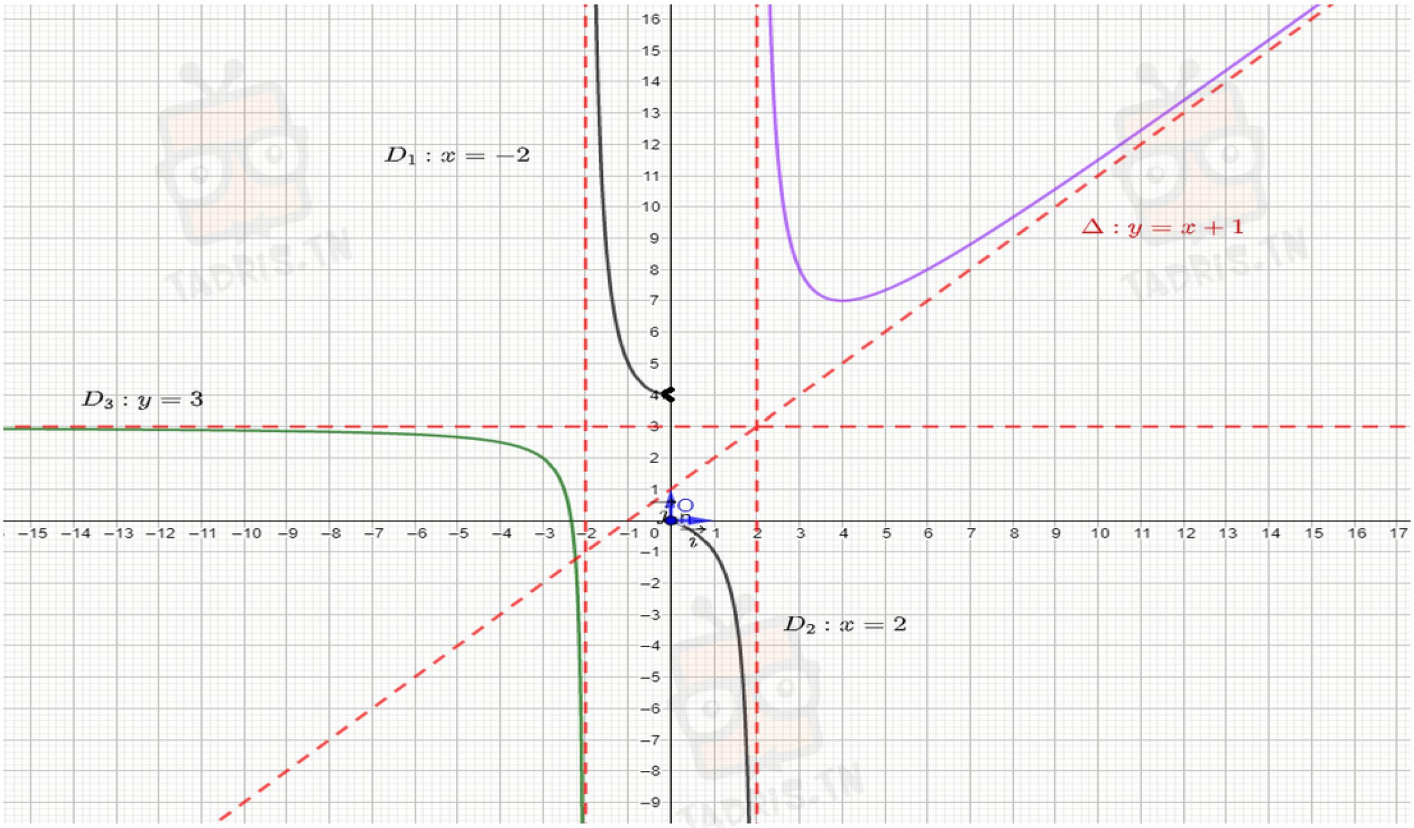
Exercice 1:



1) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x); \quad \lim_{x \to 0^-} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

2) Déterminer en justifiant:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{f(x)-3} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - x^2 + x}{f(x) - x - 2} \right).$$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Montrer que g est prolongeable par continuité en -2 et 2.

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par:
$h(x) = f^2(x) - 4f(x) + x$.

a) Montrer que h est continue en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = +\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2:

$1^{ère}$ Partie

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. Interpréter garphiquement le résultat.

2) a) Montrer que la droite $\mathscr{D} : y = x-1$ est un asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini.

   b) Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'asymptote $\mathscr{D}$.

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par: $g(x) = \frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)|x-1|}$.
Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet deux asymptotes obliques dont on déterminera leurs équations.

$2^{ème}$ Partie

On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par:

$$f_a(x) = \frac{ax^3-3x^2+3-a}{(x-1)^2}; \quad a \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer suivant le réel a la limite suivante: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.

2) a) déterminer le réel a pour que f soit prolongeable par continuité en 1.

   b) Déterminer pour la valeur a trouvée le prolongement F de la fonction f_a.

Exercice 3:

Soient A et B deux points du plan de coordonnées cartésiennes $A(\sqrt{3},-1)$ et $B(1,\sqrt{3})$.
C est le point du plan définie par $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

1) Donner les coordonées polaires des points A et B.

2) a) Construire A, B et C.

   b) Vérifier que le quadrilatère $OACB$ est un carré.

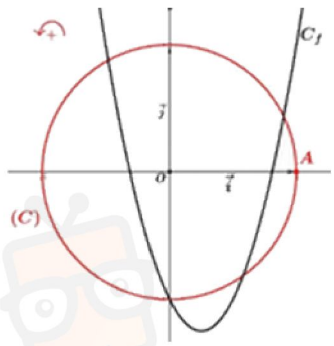
3) a) Montrer que les coordonnées polaires du point C sont $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{12})$

   b) En déduire alors que $cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) a) Montrer que $tanx=\frac{1-cos2x}{sin2x}$; $\quad x\neq(\frac{\pi}{12}+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$

   b) En déduire alors que $tan(\frac{\pi}{24})=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

Exercice 4:



1) Soit x un réel différent de $k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

   a) Montrer que $\frac{sin(4x)}{sinx}=8cos^3(x)-4cos(x)$.

   b) En déduire que $8cos^3(\frac{\pi}{5})-4cos(\frac{\pi}{5})-1=0$.

2) a) Vérifier que $8x^3-4x-1=(2x+1)(4x^2-2x-1)$.

   b) Déduire que $cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3) Résoudre dans $]-1,2]$ l'équation: $\sqrt{5}cos(\pi x)-cos(\pi x)=1$

4) Dans la figure ci-contre, on a tracé la parabole P courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=4x^2-2x-1$.
   $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique de centre O et $A(1;0)\in(\mathscr{C})$

   a) Construire sur le cercle $(\mathscr{C})$ le point A' de coordonnées polaires $(1;\frac{\pi}{5})$

   b) En déduire une construction d'un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$.